Einleitung

Dies ist die Ausarbeitung zum mündlichen Vortrag im Rahmen des Proseminars „Konvexe Mengen“ an der Universität Bremen im Wintersemester 2004/2005 und basiert auf Kapitel 2 des Buches „Konvex sets and Their Applications“ von Stephen R. Lay, Seite 10-16 erschienen 1982 im Verlag Wiley & Sons, New York.
In dieser Ausarbeitung werden die Grundlagen zu konvexen Mengen und deren Anwendungen behandelt.

1 Konvexe Mengen - Grundlagen

Definition (1.1). *Im folgenden bezeichne E^n den euklidischen Raum n-ter Dimension, also den n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit euklidischer Norm und dem Standardskalarprodukt.*
Ferner werde der Ursprung des Koordinatensystems neben der 0 auch mit Θ bezeichnet.

Definition (1.2). *Falls x und y Punkte im E^n sind, so ist das* **Geradensegment** $\overline{xy}$, *das x und y schneidet, die Menge aller Punkte der Form $\alpha x + \beta y$, mit $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ und $\alpha + \beta = 1$*

Definition (1.3). *Eine Menge S heißt* **sternförmig bezüglich einem Punkt** $x \in S$, *falls für jeden Punkt $y \in S$ gilt: $\overline{xy} \subset S$*

Definition (1.4). *Eine Menge S heißt* **konvex**, *falls für jedes Paar von Punkten $x, y \in S$ gilt: $\overline{xy} \subset S$*

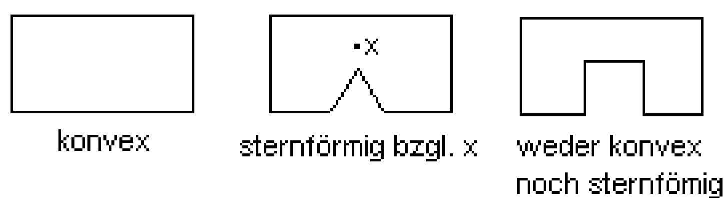

Abbildung 1:

Definition (1.5). *Der* ***Kern*** *K einer Menge S ist die Menge aller Punkte $x \in S$, so dass für alle $y \in S$ gilt: $\overline{xy} \subset S$ für alle $y \in S$*

Lemma (1.6). *Seien x, y, z drei eindeutig bestimme Punkte und sei $u \in \overline{xy}$, mit $u \neq x, u \neq y$. Dann existiert ein Punkt $w \in \overline{zy}$, so dass $v \in \overline{xw}$, falls $v \in \overline{zu}$.*

Beweis. Siehe auch *Abbildung 2*. O.B.d.A. sei x der Ursprung θ.
1) Weil $u \in \overline{xy}$ und $u \neq x, u \neq y$, folgt, es existiert $\lambda \in \mathbb{R}; 0 < \lambda < 1$ so dass gilt: $u = \lambda y$
2) Weil $v \in \overline{zu}$, folgt, es existiert $\alpha \in \mathbb{R}; 0 < \alpha < 1$ so dass gilt: $v = \alpha z + (1 - \alpha)u$

Wegen 1) $\Rightarrow v = \alpha z + (1-\alpha)\lambda y$
Es gilt:

$$w \equiv \frac{\alpha}{\alpha \ + \ \lambda(1-\alpha)} z + \frac{\lambda(1-\alpha)}{\alpha \ + \ \lambda(1-\alpha)} y \in \overline{zy}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w &= \frac{v}{\alpha + \lambda(1-\alpha)} \\ \Rightarrow v &= [\alpha + \lambda(1-\alpha)]w \end{aligned}$$

Da $\lambda < 0$
$\Leftrightarrow (1-\alpha)\lambda < (1-\alpha)$
$\Leftrightarrow \alpha + (1-\alpha)\lambda < 1$

Weil x der Ursprung ist $\Rightarrow v \in \overline{xw}$

$\square$

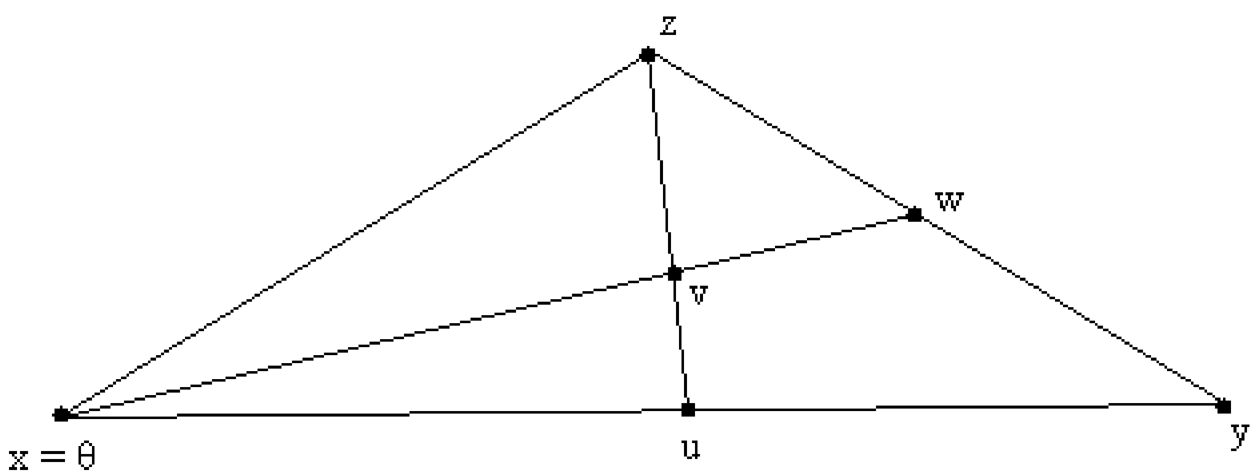

Abbildung 2:

Satz (1.7). *Der Kern K einer beliebigen Menge S ist konvex.*

Beweis. Siehe auch *Abbildung 3*. Seien $x \in K, y \in K$ mit $x \neq y$ und sei $u \in \overline{xy}$ dann ist u der folgenden Form: $u = \alpha x + (1-\alpha)y$ für $0 < \alpha < 1$.

Es ist zu zeigen, dass $u \in K$.

Sei dazu z ein beliebiger Punkt aus S.
Falls $z = x$ oder $z = y \Rightarrow \overline{uz} \subset S$.

Falls $z \neq x$ oder $z \neq y$, dann sei $v \in \overline{uz}$.
Nachdem Lemma (1.6) folgt,es existiert ein Punkt $w \in \overline{zy}$, so dass $v \in \overline{xw}$.

1) Weil $y \in K, z \in S \Rightarrow w \in S$
2) Weil $x \in K, w \in S \Rightarrow v \in S$

$\Rightarrow \overline{uz} \subset S \Rightarrow S$ ist sternförmig bzgl. u

Nach Definition (1.5) folgt: $u \in K$. Da u beliebig gewählt wurde, folgt: $\overline{xy} \in K$.
Da S sternfömig bzgl. beliebigem $u \in \overline{xy}$ ist, folgt daraus, der Kern ist konvex.

$\square$

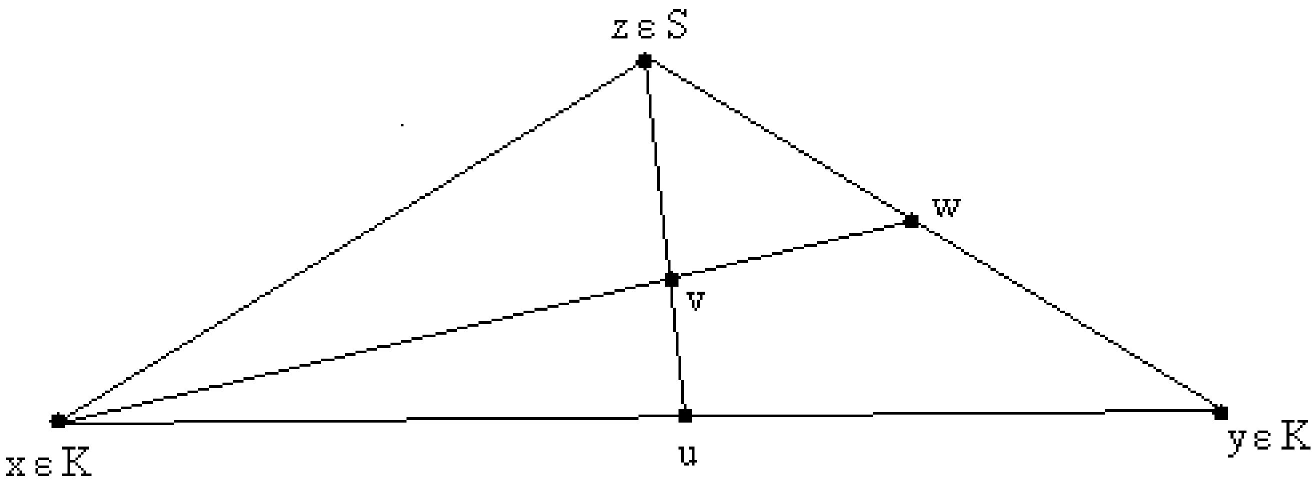

Abbildung 3:

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass eine endliche Menge von Punkten $x_1, x_2, ..., x_m \in E^n$ linear abhängig ist, falls es reele Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ gibt, die nicht alle gleich 0 sind, so dass $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m = \theta$. Andernfalls nennt man sie linear unabhängig. (Die Summe der Form $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m$ heißt eine **Linearkombination** der Punkte $x_1, x_2, ..., x_m$.) Eine Menge von Punkten $B \in E^n$ ist eine Basis für den linearen Unterraum $L \subset E^n$, falls B die maximale linear unabhängige Untermenge von L ist. Jeder linearer Unterraum L hat eine Basis und alle Basen von L haben die gleiche Anzahl von Elementen. Die gemeinsame Anzahl von Elementen, wird Dimension von L genannt. Die Standardbasis des E^n ist die Einheitsbasis $e_1, ..., e_n$. E^n hat die Dimension n.

Definition (1.8). *Eine Verschiebung eines linearen Unterraums von E^n wird als **affiner Unterraum** bezeichnet. Zwei affine Unterräume sind* **parallel***, falls der eine eine*

Translation (Verschiebung) des anderen ist. Die **Dimension eines affinen Unterraums** *S ist die Dimension des entsprechendem parallelen Unterraums. Die* **Dimension einer Menge** *S ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der die Menge enthält und wird bezeichnet als* $\dim S$. *Ein affiner Unterraum der Dimension 1 heißt* **Gerade**. *Eie affiner Unterraum der Dimension $n-1$ heißt* **Hyperbene**.

Die linearen Unterräume des E^3 sind gerade der Ursprung Θ, die Menge aller Geraden durch Θ und die Menge aller Ebenen durch Θ. Folglich sind die zugehörigen affinen Unterräume im E^3 Punkte (null-dimensional), Geraden (ein-dimensional) und Ebenen (zwei-dimensional).
In der Definition einer konvexen Menge C fordern wir, dass $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$, wenn $x, y \in C$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Wenn wir nun fordern, dass $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ für *alle* reellen Zahlen λ, dann erhalten wir eine „affine“ Menge.

Definition (1.9). *Eine Menge S heißt* **affin**, *falls aus $x, y \in S$ folgt:*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

.

Satz (1.10). *Eine Menge S ist affin, genau dann wenn sie ein affiner Unterraum ist.*

Beweis.
„ $\Rightarrow$“
Sei S affin und sei $x \in S$ beliebiger fester Punkt.
Sei $U := -x + S \Leftrightarrow S = x - U$.

Zu zeigen: U ist ein Unterraum des E^n

Dazu seien $u_1, u_2 \in U$. Dann existieren s_1 und s_2 aus S, so dass $u_1 = -x + s_1$ und $u_2 = x + s_2$.

Also gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_1 + \lambda u_2 &= (-x + s_1) + \lambda(-x + s_2) \\ &= -x + \lambda \left[2 \left(\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \right) - x \right] + (1-\lambda)s_1 \end{aligned}$$

Weil S affine ist, ist $y := \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \in S$

Aus demselben Grund gilt: $2y + (-1)x \in S$ und $\lambda[2y - x] + (1-\lambda)s_1 \in S$.

$\Rightarrow u_1 + \lambda u_2 \in -x + S = U$

$\Rightarrow U$ ist ein Unterraum des E^n und $S = x + U$ ist ein affiner Unterraum

„ $\Leftarrow$"
Sei $S := x + U$ für beliebiges $x \in E^n$ und sei U Unterraum.
Seien $s_1, s_2 \in S$.

$\Rightarrow \exists u_1, u_2 \in U : s_1 = x + u_1 \ \wedge \ s_2 = x + u_2$

Daraus folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2 &= \lambda(x+u_1) + (1-\lambda)(x+u_2) \\
&= \lambda x + \lambda u_1 + x + u_2 - \lambda x - \lambda u_2 \\
&= x + \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2.
\end{aligned}$$

Weil U ein Unterraum

$\Rightarrow \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in U$

$\Rightarrow \lambda s_1 + (1-\lambda)s_2 \in x + U = S$

$\overset{Def.}{\Rightarrow} S$ ist affine

$\square$

Definition (1.11). *Sei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, ..., k$ und sei $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ Dann heißt*

$$y := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

affine Kombination *der Punkte $x_1, x_2, ..., x_k$.*

Wenn zusätzlich gilt, $\lambda_i \geqslant 0$ für alle i, dann wird y **konvexe Kombination** *der Punkte $x_1, x_2, ..., x_k$ genannt.*

Es folgt, dass eine Menge genau dann konvex (beziehungsweise affine) ist, wenn die Menge abgeschlossen ist bezüglich der konvexen (beziehungsweise affinen) Kombination ihrer Elementenpaare. Der nächste Satz beweist dies für die Kombination beliebig vieler Elemente.

Satz (1.12). *Eine Menge S ist konvex, genau dann wenn jede konvexe Kombination von Punkten aus S wieder in S liegt.*

Beweis.
1.) Konvexe Kombination der Punkte $x_1, ..., x_k \in S \Rightarrow$ Menge konvex

Das ist gerade die Definition von konvex.

2.) Aus konvex $\Rightarrow$ konvexe Kombination der Punkte $x_1, ..., x_k \in S$

Sei S konvex.

Vollständige Induktion nach k
Sei k definiert als die Anzahl der Punkte x_i einer konvexen Kombination.

Induktionsanfang: Für $k = 2$ gilt:
$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ Da $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, mit $\lambda_1 \geq 0$ und $\lambda_2 \geq 0$ gilt, weil S konvex: $y \in S$.

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für k Punkte $\in S$.

Induktionsschritt $k \to k+1$
Sei $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}$, $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in S$ für alle i

Falls $\lambda_{k+1} = 1 \Rightarrow x = x_{k+1} \in S$

Falls $\lambda_{k+1} < 1$

$\Rightarrow \lambda_1 + ... \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} > 0$

$x = (\lambda_1 + ... \lambda_k) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + ... + \lambda_k} x_1 + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + ... + \lambda_k} x_k \right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}$

Nach Induktionsannahme gilt:

$y \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + ... + \lambda_k} x_1 + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + ... + \lambda_k} x_k$ ist aus S.

Es gilt:
$\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} > 0$

wieder in die Gleichung einsetzen

$\Rightarrow x = (1 - \lambda_{k+1}) y + \lambda_{k+a} x_{k+1}$ ist konvexe Kombination von zwei Punkten aus S und weil S konvex

$\Rightarrow x \in S$

$\Rightarrow S$ ist konvex

□

Satz (1.13). *Eine Menge S ist affin, genau dann wenn jede affine Kombination von Punkten aus S wieder in S liegt.*

Beweis. Beweis geht analog zum vorangegangen Beweis.

□

Definition (1.14). *Eine endliche Menge von Punkten $x_1, \ldots, x_m$ heißt* ***affin abhängig****, falls es $\lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}$, nicht alle $\lambda_i = 0$ gibt, so dass gilt:*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \Theta$$

Andernfalls wird die Menge als ***affin unabhängig*** *bezeichnet.*

Satz (1.15). *1) Jede Teilmenge des E^n aus mindestens $n+1$ eindeutig bestimmten Punkten ist linear abhängig.*

2) Jede Teilmenge des E^n aus mindestens $n+2$ eindeutig bestimmten Punkten ist affin abhängig

Beweis.
ad 1) $\dim E^n = n$

$\Rightarrow$ n ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Punkten (Anzahl der Basisvektoren)

$\Rightarrow$ eine Menge aus $n+1 > n$ Punkten muss linear abhängig sein

$\diamondsuit$

ad 2) Seien $x_1, \ldots, x_m$ eindeutig bestimmte Punkte des E^n, mit $m \geq n+2$ und $x_i \neq \Theta$.

Dann sind die $m-1$ Vektoren $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_m - x_1$ linear abhängig. Dies folgt aus Teil 1).

$\Rightarrow$ es existieren Skalare $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, nicht alle $\alpha_i = 0$, so dass es folgende, nicht-triviale Darstellung der 0 gibt:

$$\alpha_2(x_2 - x_1) + \alpha_3(x_3 - x_1) + \cdots + \alpha_m(x_m - x_1) = \Theta$$

Klammert man nun x_1 aus, erhält man:

$$-(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m)x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = \Theta$$

mit $\alpha_1 := -(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m)$ ergibt sich:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = \Theta$$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$

$\overset{Def.}{\Rightarrow} x_1, \ldots, x_m$ sind affin abhängig

□

Damit haben wir nun drei Arten kennengelernt, wie man Punkte im E^n kombiniert: Linear-, Affin- und Konvexkombination. Falls eine Menge im algebraischen Sinn abgeschlossen bzgl. allen Linearkombinationen ist, nennt man sie Untervektorraum. Falls sie abgeschlossen ist bzgl. aller Konvexkombinationen, ist sie eine konvexe Menge und bzgl. aller Affinkombinationen, ein affiner Unterraum.
Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass der Schnitt von Untervektorräumen wieder ein Untervektorraum ist. Ähnliches gilt für affine und konvexe Mengen.

Satz (1.16). *1) Falls $\{S_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{A}$ Familie von konvexen Mengen ist, dann ist auch $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$ konvex.*

2) Falls $\{T_\beta\}, \beta \in \mathcal{B}$ Familie von affinen Mengen ist, dann ist auch $\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} T_\beta$ affin.

Beweis.

ad 1) Wenn x und y im Schnitt aller S_α liegt, dann sind x und y in jedem einzelnen S_α. Weil jedes S_α konvex ist, gilt definitionsgemäß: $\overline{xy} \subset S_\alpha$ für alle α. Daher ist $\overline{xy} \subset \bigcap S_\alpha$ und damit ist der Schnitt konvex.

♢

ad 2) Wenn x und y im Schnitt aller T_β liegt, dann sind x und y in jedem einzelnen T_β. Weil jedes T_β affin ist, gilt definitionsgemäß: $\lambda x + (1-\lambda)y \subset T_\beta$ für alle β und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Daher ist $\lambda x + (1-\lambda)y \subset \bigcap T_\beta$ und damit ist der Schnitt affin.

□

Mit dem vorhergehenden Satz lässt sich nun - analog zur linearen Hülle in der linearen Algebra - das konvexe bzw. affine Erzeugnis einer Menge definieren:

Definition (1.17). *Sei $S \subset E^n$. Dann ist die affine Hülle von S definiert als der Durchschnitt über alle affinen Obermengen von S und sei im Folgenden mit* aff S *bezeichnet.*

Nun können wir topologische Eigenschaften der konvexen Mengen etwas genauer untersuchen, dafür werden folgende Definitionen benötigt.

Definition (1.18). *Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann wird die Spurtopologie bzgl. Y definiert als $\mathfrak{T}_Y := \{B \subset Y | \exists T \in \mathfrak{T} : B = Y \cap T\}$.*

Definition (1.19). *Das* **Innere** *einer Menge S ist die Vereinigung aller in S enthaltenen offenen Mengen und wird mit* $\operatorname{int} S$ *bezeichnet.*
Das ***relative Innere*** *einer Menge S ist das Innere bzgl. der Spurtopologie bzgl.* $\operatorname{aff} S$ *und wird mit* $\operatorname{relint} S$ *bezeichnet.*

Falls S aus einem einzigen Punkt x besteht, dann ist relint $S = \operatorname{relint}\{x\} = x$. Falls S aus einem Geradensegment $\overline{xy}$, dann ist $\operatorname{relint} S$ das Geradensegment ohne dessen Endpunkte. Speziell besteht $\operatorname{relint} \overline{xy}$ aus allen Punkten der Form $\alpha x + \beta y$, mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\alpha + \beta = 1$.

Satz (1.20). *Sei C eine konvexe Menge. Falls $x \in \operatorname{int} C$ und $y \in C$, dann ist* $\operatorname{relint} \overline{xy} \subset \operatorname{int} C$.

Beweis. Siehe auch *Abbildung 4*. Sei $y \in C$ und o.B.d.A. sei $y = 0 = \Theta$ der Ursprung.
Sei $x \in \operatorname{int} C \overset{Def.}{\Rightarrow} \exists$ eine offene Kugel $B(x, \delta) \subset C$.
Für beliebiges $u \in relint\ \overline{xy}$ existiert ein $\lambda, (0 < \lambda < 1)$, so dass $u = \lambda x$.
Es gilt: $B(\lambda x, \lambda\delta) = \lambda B(x, \delta)$
Denn: Zu zeigen: $\exists y \in B(x, \delta) : \lambda y \in \lambda B(x, \delta)$.
Sei $y \in B(x, \delta)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & ||x - y|| < \delta \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda ||x - y|| < \lambda\delta \\ \Leftrightarrow \quad & ||\lambda x - \lambda y|| < \lambda\delta \end{aligned}$$

Weil C konvex ist und $0 \in C$, gilt: $\lambda B(x, \delta) \subset C$
$\Rightarrow B(\lambda x, \lambda\delta) = B(u, \lambda\delta) \subset C$

Da die Kugel um u mit Radius $\lambda\delta$ in C enthalten ist, folgt daraus, gemäß der Defi-

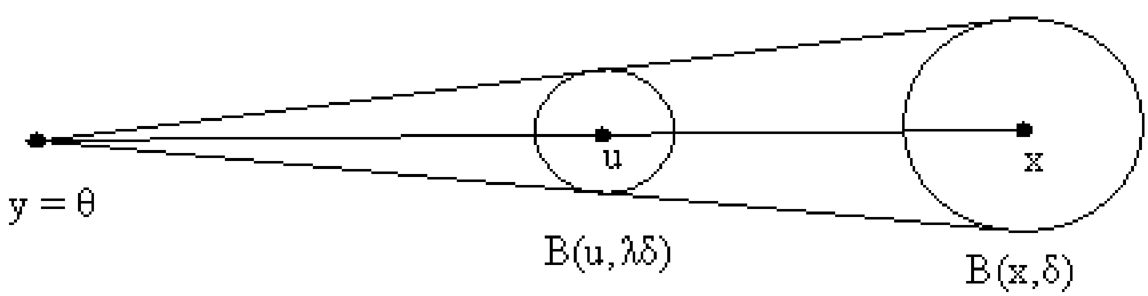

Abbildung 4:

Korollar (1.21). *Falls C konvex ist, dann ist das Innere* $\operatorname{int} C$ *konvex.*

Beweis. Seien $x, y \in \operatorname{int} C$.
Nach Satz (1.20) gilt: relint $\overline{xy} \subset \operatorname{int} C$
Nun ist aber $\overline{xy} =$ relint $\overline{xy} \cup \{x, y\}$, daher ist $\overline{xy} \subset \operatorname{int} C$.
Damit gilt, dass $\operatorname{int} C$ konvex ist.

□

Definition (1.22). *Die* **abgeschlossene Hülle** *einer Menge S ist der Durchschnitt aller geschlossenen Mengen $(S_i)_{i \in I}$, die S enthalten und wird mit* $\operatorname{cl} S$ *bezeichnet.*

Satz (1.23). *Falls C eine konvexe Menge ist, dann ist der Abschluss* $\operatorname{cl} C$ *konvex.*

Beweis. Siehe auch *Abbildung 5*. Seien $x, y \in \operatorname{cl} C$ und $u \in \overline{xy}$. Dann ist u der Form $u = \alpha x + \beta y$, mit $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ und $\alpha + \beta = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die offene Kugel $B(u, \frac{1}{n})$.

Weil $x, y \in cl\ C \Rightarrow \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap C \wedge\ \exists y_n \in B(y, \frac{1}{n}) \cap C$

Behauptung: $u_n := \alpha x_n + \beta y_n \in B(u, \frac{1}{n})$.

Bew: zu zeigen: $d(u_n, u) < \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
||u - u_0|| &= ||\alpha x + \beta y - \alpha x_0 - \beta y_0)|| \\
&= ||\alpha x + \beta y + \alpha x_0 + \beta y - \alpha x_0 - \beta y_0 - \alpha x_0 - \beta y|| \quad \text{[nach Dreiecksungleichung]} \\
&\leq ||\alpha x + \beta y - \alpha x_0 - \beta y|| + ||\alpha x_0 + \beta y - \alpha x_0 - \beta y_0|| \\
&= \alpha ||x - x_0|| + \beta ||y - y_0|| \\
&< \alpha \frac{1}{n} + \beta \frac{1}{n} = (\underbrace{\alpha + \beta}_{=1\ n.\ Vor.}) \frac{1}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

♢

Ferner gilt, weil $u_n \in \overline{x_n y_n}$ und C konvex ist, gilt definitionsgemäß auch $u_n \in C$

$\Rightarrow$ Betrachte die so konstruierte Folge (u_n), es gilt offensichtlich $u_n \to u$, also gilt $u \in \operatorname{cl} C$.

$\Rightarrow \operatorname{cl} C$ ist konvex

□

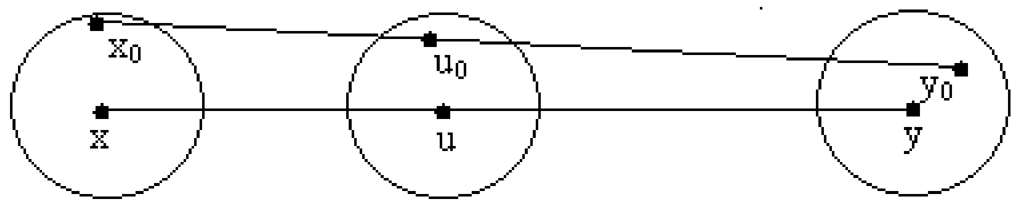

Abbildung 5:

Quellennachweis

(1) Lay, Stephen R., „Konvex sets and Their Applications“, Seite 10-16 , Wiley & Sons, New York, 1982